

第3讲 格点问题冲刺

一、线段最值问题（三）

【教法备注】

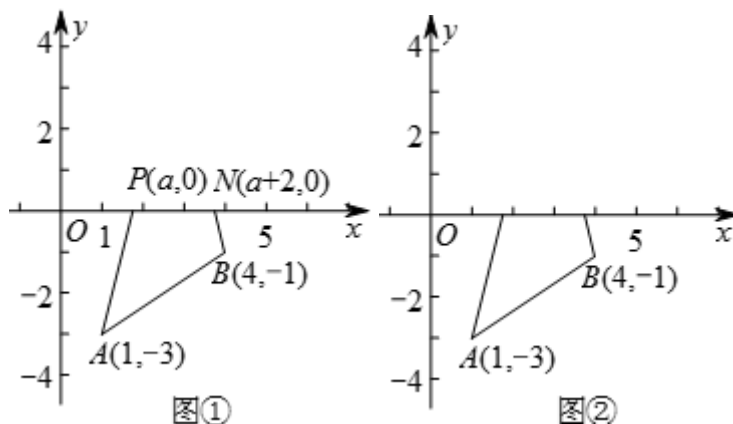
该部分原理为：过河问题

例题1

1. 如图①，在平面直角坐标系中，点 $A(1, -3)$ ， $B(4, -1)$ ， $P(a, 0)$ ， $N(a+2, 0)$ 。

PN 的长为 _____。

要使四边形 $PABN$ 的周长最小，请在图②中画出点 P 、 N 的位置，并计算 a 的值为 _____。



【答案】 $2; \frac{7}{4}$

【解析】 立①②，解得： $\begin{cases} k = -4 \\ b = 7 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 直线 $A'M$ 解析式为： $y = -4x + 7$ 。

令 $y = 0$ ，则 $-4x + 7 = 0$

$x = \frac{7}{4}$ 。联

$\therefore P\left(\frac{7}{4}, 0\right)$ ，故 $a = \frac{7}{4}$ 。 $\therefore P(a, 0)$ ，

$\therefore OP = a$ 。

$\therefore N(a+2, 0)$ ，

$\therefore ON = a+2$ 。

$\therefore PN = ON - OP$

$= a+2 - a$

$= 2$.

作图：过点 B 作 x 轴的平行线 l_1 ,

在 l_1 上取 $BM = PN = 2$, 点 M 在 B 左侧 ,

取点 A 关于 x 轴对称点 A' ,

连接 $A'M$, 与 x 轴交点 ,

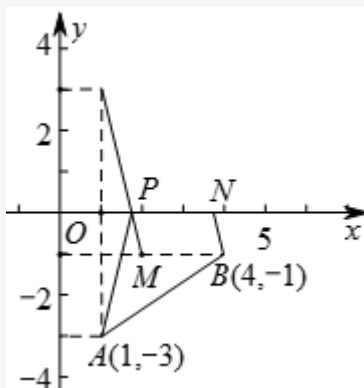
则为 P 作 $BN // PM$ 交 x 轴于 N ,

则 P 、 N 两点确定 ,

$\therefore M(2, -1)$, $A'(1, 3)$,

设直线 $A'M$ 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} -1 = 2k + b \textcircled{1} \\ 3 = k + b \textcircled{2} \end{cases} .$$



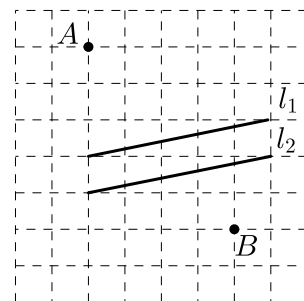
【标注】【知识点】根据条件写一次函数解析式

练习1

2. 如图 , 在每个小正方形的边长为1的网格中 , 点 A , B 均在格点上 . l_1 , l_2 是一条小河平行的两岸 .

(1) AB 的距离等于 _____ .

(2) 现要在小河上修一座垂直于两岸的桥 MN (点 M 在 l_1 上 , 点 N 在 l_2 上 , 桥的宽度忽略) , 使 $AM + MN + NB$ 最短 , 请在如图所示的网格中 , 用无刻度的直尺 , 画出 MN , 并简要说明点 M , N 的位置是如何找到的 (不要求证明) _____ .



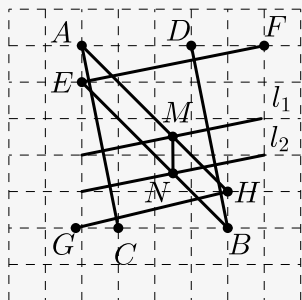
【答案】 (1) $\sqrt{41}$

(2) 画图见解析 , 证明见解析 .

【解析】 (1) 由图可知 , $AB = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$,

故答案为 $\sqrt{41}$.

(2) 如图 ,



取格点 C ，连接 AC ，（使 $AC \perp l_1$ ），

取格点 E 、 F ，连接 EF ，（使 $EF \parallel l_1$ ），与 AC 交点 A' ；

同理，作点 B' ，连接 AB' 与 l_1 交于点 M ，连接 $A'B$ 与 l_2 交于点 N ，连接 MN 。

【标注】【知识点】勾股定理与实际问题

【知识点】平行线判定

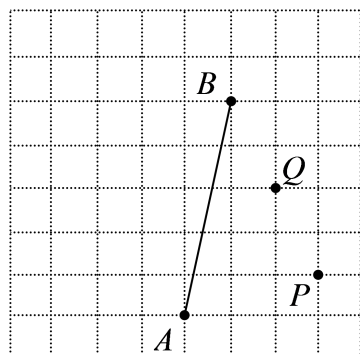
【知识点】轴对称的定义

【能力】运算能力

3. 在下列网格中，每个小正方形的边长都是1，点 A ， B ， P ， Q 均为格点。

（1）线段 AB 的长度等于_____。

（2）点 M 、 N 是线段 AB 上的两个动点（ M 较靠近点 B ），且始终满足 $MN = \frac{1}{4}\sqrt{26}$ ，若点 M 、 N 运动到恰好使四边形 $MNPQ$ 的周长最小时，请在给定的网格中用无刻度直尺画出点 M 的位置，并简要说明你的作图方法：_____。



【答案】（1） $\sqrt{26}$

（2）具体作图见解析。

【解析】（1） $AB = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ 。

（2）如图，取格点 P' ， C ， C' ， D ， D' 。

连接 CC' 交格线于 E ，连接 DD' 交格线于 F ，

连接 EF 交 PP' 于 G ，此时

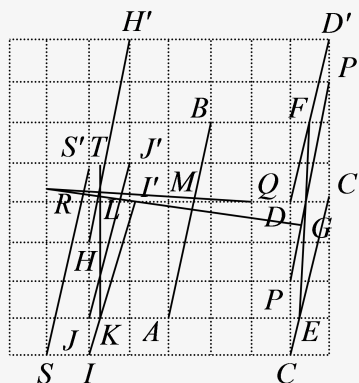
$$PG = \frac{\sqrt{26}}{4},$$

取格点 H, H', I, I', J, J' ，

连接 II' 交格线于 K ，连接 JJ' 交格线于 L ，

延长 KL 与 HH' 交于点 T ，取格点 S, S' ，延长 GT 交 SS' 于点 R ，

连接 RQ 交 AB 于点 M ， M 即为所求。



【标注】【知识点】直接用勾股求边长；其他路径最短问题

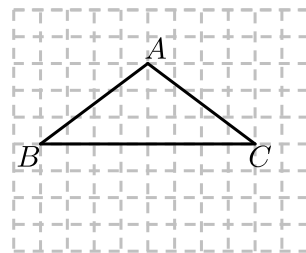
二、线段最值问题（四）

【教法备注】

该部分原理为：胡不归问题

例题2

4. 在每个小正方形的边长为1的网格中，有等腰三角形 ABC 、点 A, B, C 都在格点上，点 D 为线段 BC 的动点。



(1) AC 的长度等于_____。

(2) 当 $AD + \frac{3}{5}DC$ 最短时，请用无刻度的直尺，画出点 D ，并简要说明点 D 的位置是如何找到的（不要求证明）_____。

【答案】(1) 5

(2) 作点 A 关于 BC 的对称点 A' ，取格点 M ，连接 $A'M$ ，使得 $A'M \perp AC$ ，则 $A'M$ 与 BC 的交点即为所求点 D

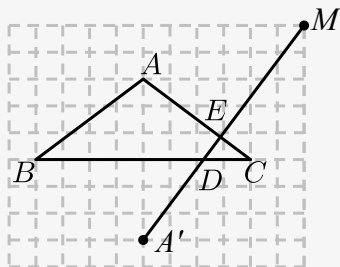
【解析】(1) $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

(2) 作点A关于BC的对称点A'，

取格点M，连接A'M，此时A'M⊥AC于点E，

则A'M与BC的交点即为所求点D.

这是因为 $DE = \frac{3}{5}DC$ ， $A'D = AD$ ，当A'E⊥AC时， $AD + \frac{3}{5}DC$ 最短.



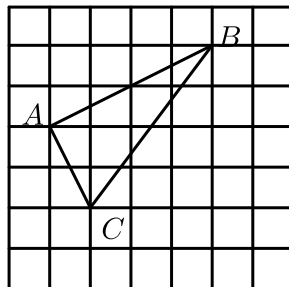
【标注】【知识点】直接用勾股求边长

【知识点】勾股定理

【知识点】轴对称的性质

练习2

5. 如图，将△ABC放在每个小正方形的边长为1的网格中，点A，点B，点C均落在格点上.



(1) △ABC的面积等于 ____.

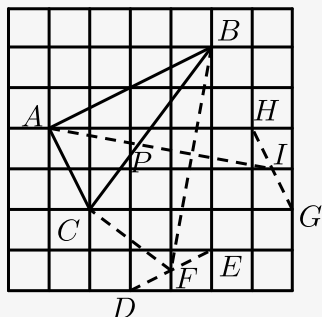
(2) 点P为边BC上的动点，当 $\sqrt{5}AP + BP$ 取得最小值时. 请在如图所示的网格中，用无刻度的直尺，画出线段AP，并简要说明点P的位置是如何找到的（不要求证明） ____.

【答案】(1) 5

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $S_{\triangle ABC} = 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4$
 $= 16 - 1 - 4 - 6$
 $= 5$.

(2) 如图所示，线段AB即为所求.



操作步骤如下：

- ①取格点 D 、 E ，连接 DE ，与网格交于点 F ．
- ②连接 CF ， DF ，得到 $\angle CBF = \angle ABC$ ．
- ③取格点 H 、 G ，连接 HG ，与网格交于点 I ．
- ④连接 AI ，与 BC 交于点 P ，得到 $AP \perp BF$ ．

线段 AP 即为所求．

这是因为要求 $\sqrt{5}AP + BP$ ，即求 $\sqrt{5}(AP + \frac{\sqrt{5}}{5}BP)$ 的最小值．

$\frac{\sqrt{5}}{5}BP$ 为点 P 到 AB 的距离，也等于点 P 到 BF 的距离，

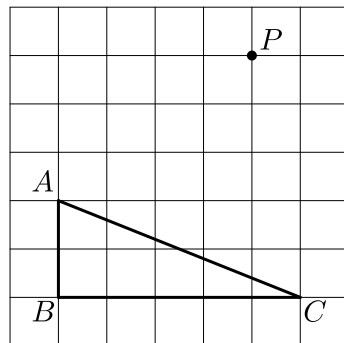
由垂线段最短，作垂线得到点 P ．

【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

三、 对称与旋转

|| 例题3

6. 如图，在每个小正方形的边长为1的网格中， $\triangle ABC$ 的顶点 A ， B ， C 均落在格点上．



(1) AC 的长等于 _____ ．

(2) 点 P 落在格点上， M 是边 BC 上任意一点，点 B 关于直线 AM 的对称点为 B' ，当 PB' 最短时，请在如图所示的网格中，用无刻度的直尺，画出点 B' ，并简要说明点 B' 的位置是如何找到的

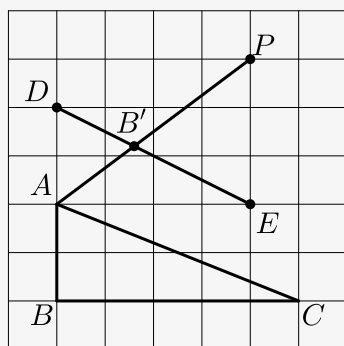
(不要求证明) _____ .

【答案】(1) $\sqrt{29}$

(2) 画图见解析 ; 取格点 D 、 E , 连接 AP 、 DE , 交点即为 B' .

【解析】(1) $BC = 5$, $AB = 2$,
故 $AC = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

(2) 如图 , 取格点 D 、 E ,
连接 AP 、 DE , 交点即为 B' .



【标注】【知识点】直接用勾股求边长

【知识点】勾股定理与实际应用

练习3

7. 如图 , 在每个小正方形的边长为1的网格中 , 点 A 、 B 、 C 、 D 均在格点上 , 点 P 是在直线 CD 上的动点 , 连 BP , 点 A' 是点 A 关于直线 BP 的对称点 .

(1) 在图①中 , 当 $DP = 1$ (点 P 在点 D 的左侧) 时 , 计算 DA' 的值等于 _____ .

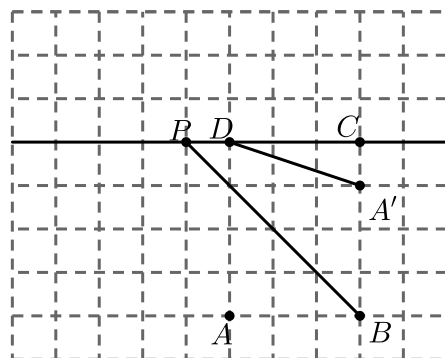


图 ①

(2) 当 DA' 取得最小值时 , 请在如图②所示的网格中 , 用无刻度的直尺 , 画出点 A' , 并简要说明点 A' 的位置是如何找到的 (不要求证明) _____ .

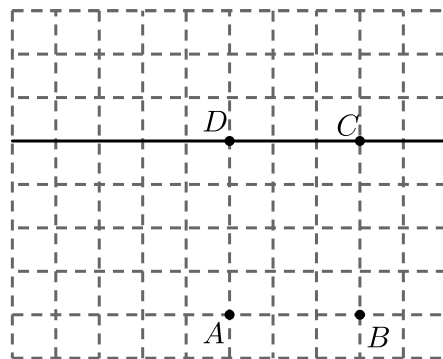


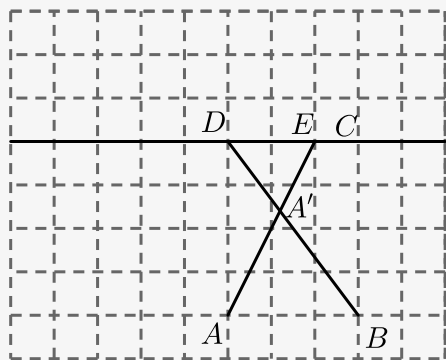
图 ②

【答案】(1) $\sqrt{10}$

(2) 如图所示，连接 BD ，然后取格点 E ，连接 AE 与 BD 交点 A' 即为所求

【解析】(1) 由勾股定理可得 $A'D = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

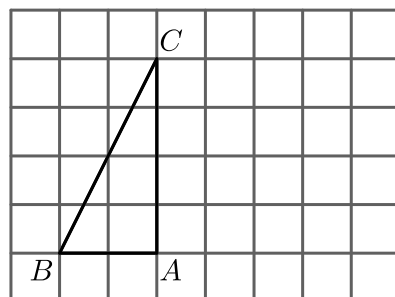
(2) 如图所示，连接 BD ，然后取格点 E ，连接 AE 与 BD 交点 A' 即为所求 .



【标注】【知识点】作轴对称变换

例题4

8. 如图，在每个小正方形的边长为1的网格中， $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 均在格点上 .



(1) BC 的长等于 _____ .

(2) 在如图所示的网格中，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转，使得点 B 的对应点 B' 落在边 BC 上，得到

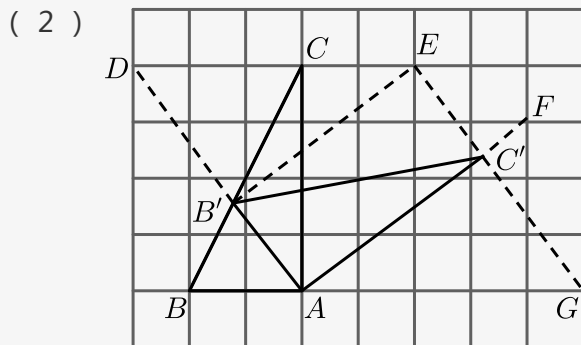
$\triangle AB'C'$ ，请用无刻度的直尺，画出 $\triangle AB'C'$ ，并简要说明这个三角形的各个顶点是如何找

到的（不要求证明）。

【答案】（1） $2\sqrt{5}$

（2）画图见解析；取格点 D, E, F, G ，连接 AD 交边 BC 于点 B' ，连接 AF 和 EG 相交于点 C' 。

【解析】（1）由题意可得： $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ 。



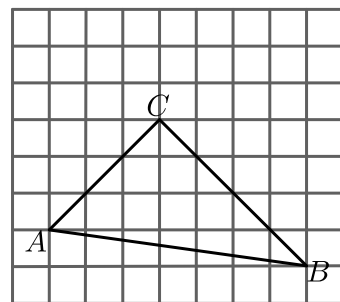
如图，取格点 D, E, F, G ，连接 AD 交边 BC 于点 B' ，连接 AF 和 EG 相交于点 C' ，

则 $\triangle AB'C'$ 即为所求。

【标注】【知识点】作出旋转后的图形

练习4

9. 如图，在每个小正方形的边长为1的网格中， $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 均在格点上。



（1） $\angle ACB$ 的大小为 _____。

（2）在如图所示的网格中， P 是 BC 边上任意一点，以 A 为中心，取旋转角等于 $\angle BAC$ ，把点 P 逆时针旋转，点 P 的对应点为 P' ，当 CP' 最短时，请用无刻度的直尺，画出点 P' ，并简要说明点 P' 的位置是如何找到的（不要求证明）_____。

【答案】（1） 90°

(2) 如图, 取 D, E , 连接 DE , 交 AB 于点 T , 取 M, N , 连接 MN , 交 BC 延长线于点 G , 取点 F , 连接 FG 交 TC 于 P' , 则 P' 即为所求.

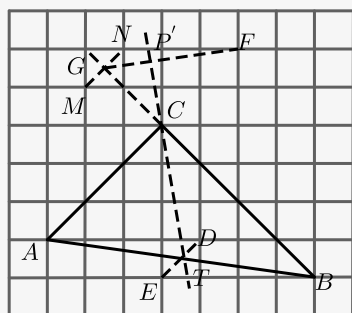
【解析】(1) $\because AC = 3\sqrt{2}, BC = 4\sqrt{2}, AB = 5\sqrt{2}$,

在 $\triangle ABC$ 中,

$$AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

(2) 如图, 取 D, E , 连接 DE , 交 AB 于点 T ,
取 M, N , 连接 MN , 交 BC 延长线于点 G ,
取点 F , 连接 FG 交 TC 于 P' ,
则 P' 即为所求.

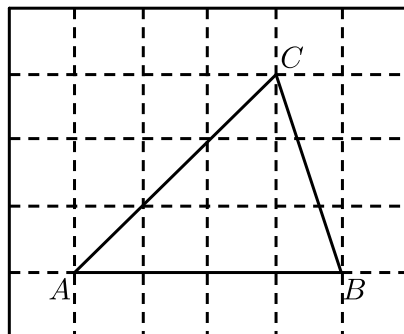


【标注】【知识点】作出旋转后的图形

四、三角形内接最大图形

例题5

10. 如图, 将 $\triangle ABC$ 放在每个小正方形的边长为1的网格中, 点 A, B, C 均落在格点上.



(1) $\triangle ABC$ 的面积等于 _____.

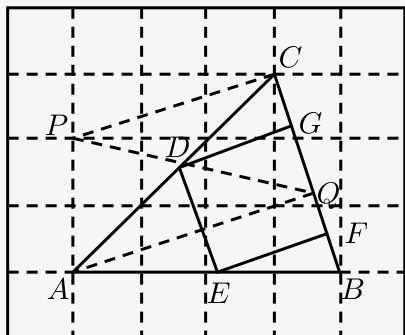
(2) 若四边形 $DEFG$ 是 $\triangle ABC$ 中所能包含的面积最大的正方形, 请在如图所示的网格中, 用直尺和三角尺画出该正方形, 并简要说明画图方法 (不要求证明).

【答案】(1) 6

(2) 证明见解析，画图见解析。

【解析】(1) $\triangle ABC$ 的面积为: $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.

(2) 如图，取格点 P ，连接 PC ，过点 A 画 PC 的平行线，与 BC 交于点 Q ，连接 PQ 与 AC 相交得点 D ，过点 D 画 CB 的平行线，与 AB 相交得点 E ，分别过点 D, E 画 PC 的平行线，与 CB 相交得点 G, F ，则四边形 $DEFG$ 即为所求。



【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

练习5

11. 如图1，将 $\triangle ABC$ 放在每个小正方形的边长为1的网格中，点 A, B, C 均落在格点上，点 M, N 分别为边 AB, AC 上的动点，且 $MN \parallel BC$ ，将 $\triangle AMN$ 沿 MN 翻折得到 $\triangle A'MN$ ，设 $\triangle A'MN$ 与四边形 $BCNM$ 重叠部分的面积为 S .

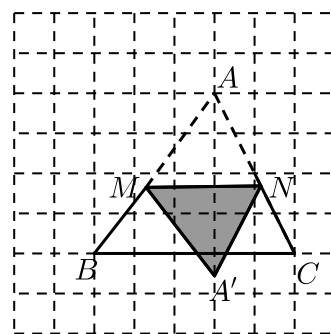


图 1

- (1) $\triangle ABC$ 的面积等于 _____ .
- (2) 当 S 最大时，请在图2所示的网格中，用无刻度的直尺画出直线 MN ，并简要说明点 M 和点 N 是如何找到的（不要求证明） _____ .

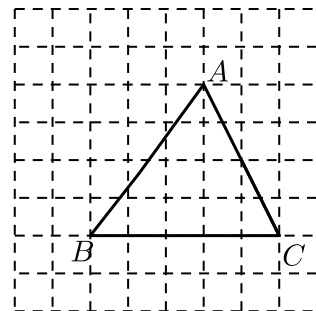


图 2

【答案】(1) 10

(2) 过点A作 $EF \parallel BC$, 取 $AE = AF = 2$, 在BC上取 $BG = CH = 1$, 连接EG, FH分别交AB、AC于M、N. 图中M、N就是所求的点

【解析】(1) 如图1中, 作 $AH \perp BC$ 于H,

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10.$$

(2) ①如图1中, 当 $0 < MN \leq \frac{5}{2}$ 时,

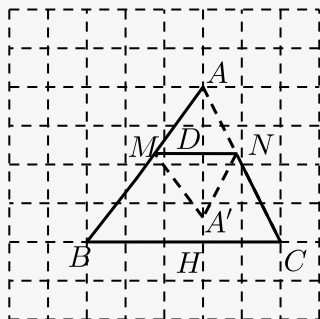


图 1

$\triangle A'MN$ 与四边形BCNM重叠部分为 $\triangle MNA'$,

设 $MN = x$, AD与AH交于点D,

$\because MN \parallel BC$,

$\therefore \triangle AMN \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{MN}{BC} = \frac{AD}{AH},$$

$$\therefore AD = \frac{4}{5}x,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times x \times \frac{4}{5}x = \frac{2}{5}x^2,$$

$$\therefore x = \frac{5}{2} \text{ 时, } S_{\text{最大值}} = \frac{5}{2}.$$

②如图2中, 当 $x > \frac{5}{2}$ 时, $A'H = 2AD - AH = \frac{8}{5}x - 4$,

$\because EF \parallel MN$,

$$\therefore \frac{EF}{MN} = \frac{A'H}{A'D},$$

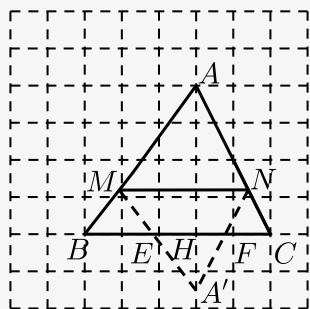


图 2

$$\therefore EF = 2x - 5,$$

$$\therefore S = S_{\triangle A'MN} - S_{\triangle A'EF} = -\frac{6}{5}\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{10}{3},$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{10}{3} \text{ 时, } S \text{ 最大值为 } \frac{10}{3},$$

$$\therefore \frac{10}{3} > \frac{5}{2},$$

$$\therefore S \text{ 最大值为 } \frac{10}{3}, \text{ 此时 } AD = \frac{8}{3} = \frac{2}{3}AH,$$

$$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{AN}{NC} = 2,$$

作法：如图3中，过点A作 $EF \parallel BC$ ，取 $AE = AF = 2$ ，

在BC上取 $BG = CH = 1$ ，连接EG，FH分别交AB、AC于M、N．

图中M、N就是所求的点．

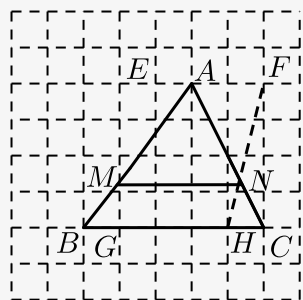


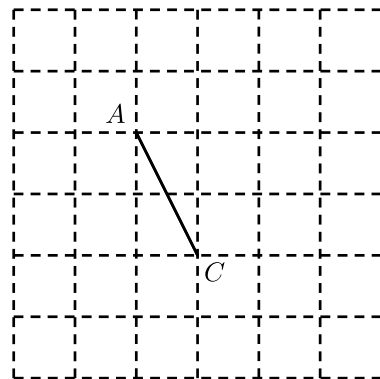
图 3

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

五、构造特殊四边形

例题6

12. 如图，将线段AC放在每个小正方形的边长为1的网格中，点A、C均落在格点上．



(1) AC 的长等于 _____ .

(2) 请在如图所示的网格中 . 用无刻度的直尺 , 画出一个以线段 AC 为对角线、周长为 $4\sqrt{2}$ 的矩形 $ABCD$, 并简要说明画图的方法(不要求证明) _____ .

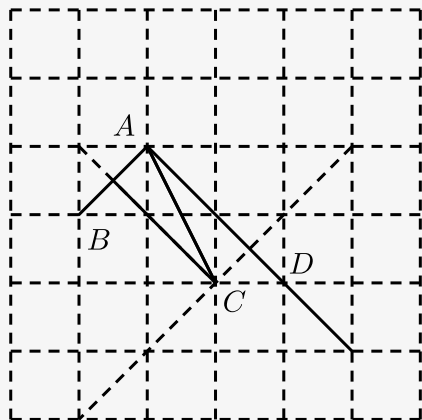
【答案】 (1) $\sqrt{5}$

(2) 如图 , 作边长为1的正方形的两条对角线 , 交于点 B , 作边长为3的正方形的两条对角线 , 交于点 D , 顺次连接 AB , BC , CD , DA , 四边形 $ABCD$ 即为所求 .

【解析】 (1) 由图可知 , AC 是一个 1×2 的矩形中的对角线 , 根据勾股定理可知 ,

$$AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} .$$

(2) 如图 , 作边长为1的正方形的两条对角线 ,



交于点 B ,

作边长为3的正方形的两条对角线 ,

交于点 D ,

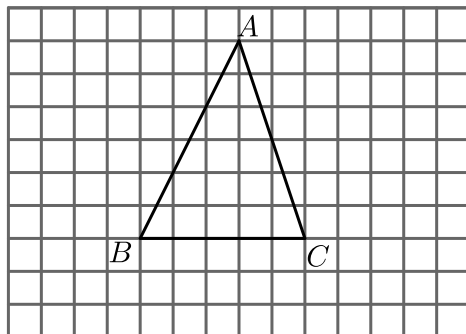
顺次连接 AB , BC , CD , DA ,

四边形 $ABCD$ 即为所求 .

【标注】 【知识点】 直接用勾股求边长

练习6

13. 如图，在每个小正方形的边长为1的网格中， A, B, C 均在格点上。



(1) $\triangle ABC$ 的面积为 _____。

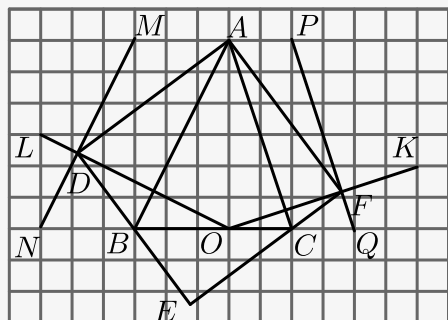
(2) 若有一个边长为6的正方形，且满足点A为该正方形的一个顶点，且点B，点C分别在该正方形的两条边上，请在如图所示的网格中，用无刻度的直尺，画出这个正方形，并简要说明其它顶点的位置是如何找到的（不要求证明）_____。

【答案】 (1) 15

(2) 画图见解析；取格点 O, L, M, N ，连接 OL, MN 交于点 D ，同样地，取格点 K, P, Q ，连接 OK, PQ 交于点 F ，作射线 DB, FC 交于点 E ，连接 AD, AF ，四边形 $ADEF$ 即为所求。

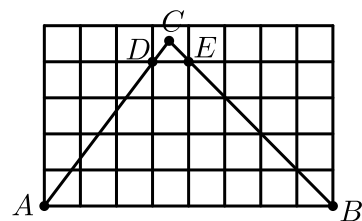
【解析】 (1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$ 。

(2) 如图，取格点 O, L, M, N ，
连接 OL, MN 交于点 D ，
同样地，取格点 K, P, Q ，
连接 OK, PQ 交于点 F ，
作射线 DB, FC 交于点 E ，
连接 AD, AF ，
四边形 $ADEF$ 即为所求。



【标注】【知识点】作图依据

14. 如图，在每个小正方形的边长为1的网格中， A, B, D, E 为格点， C 为 AD, BE 的延长线的交点。

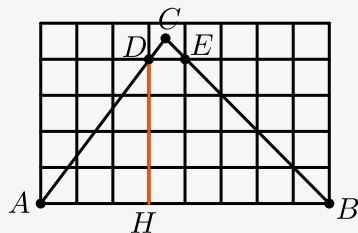


- (1) $\sin \angle CAB$ 的结果为 _____ .
- (2) 若点 R 在线段 AB 上，点 S 在线段 BC 上，点 T 在线段 AC 上，且满足四边形 $ARST$ 为菱形，请在如图所示的网格中，用无刻度的直尺，画出菱形 $ARST$ ，并简要说明点 R, S, T 的位置是如何找到的（不要求证明）_____ .

【答案】(1) $\frac{4}{5}$.

(2) 画图见解析 .

【解析】(1) 作 $DH \perp AB$ 于 H ，



$$AH = 3, DH = 4, AD = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle DAH$ 中：

$$\sin \angle CAB = \frac{DH}{AD} = \frac{4}{5} .$$

- (2) 思路：计算出菱形边长再去画 .

由 $\triangle CDE \sim \triangle CAB$ 知：

$$\frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB}, \text{ 即 } \frac{CD}{CD+5} = \frac{1}{8},$$

$$\text{解得：} CD = \frac{5}{7},$$

$$AC = CD + AD = \frac{40}{7},$$

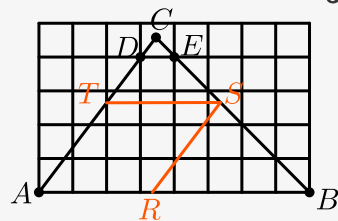
由 $\triangle BRSE \sim \triangle BAC$ 知：

$$\frac{BR}{AB} = \frac{RS}{AC},$$

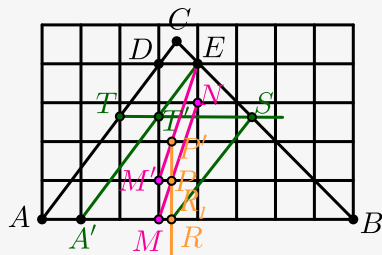
设 $AR = RS = x$,

$$\text{则 } \frac{8-x}{8} = \frac{x}{\frac{40}{7}}, \text{ 解得：} x = \frac{10}{3},$$

故只需截取 $AT = AR = \frac{10}{3}$ 即可 .



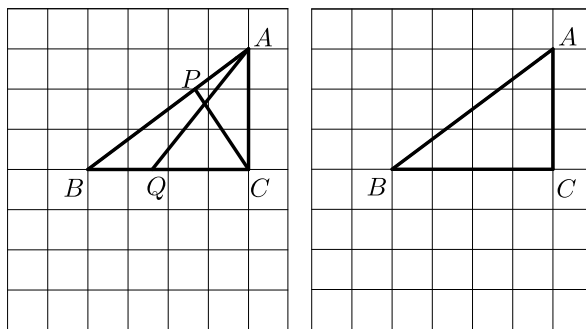
画法：取格点 T 、 A' 、 M 、 N 、 M' ，连 $A'E$ 交格点于 T' ，连 TT' 交 BC 于 S ，连 MN 交格点于 P ，连 $M'E$ 交格点于 P' ，连 PP' 交格点于 R ， T 、 S 、 R 即为所求 .



【标注】【知识点】网格中的三角形相似

六、线段和最值问题（五）

15. 如图，在由边长都为1的小正方形组成的网格中，点 A 、 B 、 C 均为格点，点 P 、 Q 分别为线段 AB 、 BC 上的动点，且满足 $AP = BQ$.



- (1) 线段 AB 的长度等于 _____ .
- (2) 当线段 $AQ + CP$ 取得最小值时，请借助无刻度直尺在给定的网格中画出线段 AQ 和 CP ，并简要说明你是怎么画出点 Q 、 P 的：_____ .

【答案】(1) 5

(2) 画图见解析，证明见解析 .

【解析】(1) 线段 AB 的长度 = $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

故答案为：5 .

- (2) 如图1中, 作 $BH \perp AB$, 使得 $BH = AC = 3$, 易证 $\triangle CAP \cong \triangle HBQ$, 推出 $HQ = PC$,
 $\therefore PC + AQ = AQ + HQ$,
 $\therefore AQ + QH \leq AH$,
 $\therefore$ 当 A, Q, H 共线时, $AQ + QH$ 的值最小 .

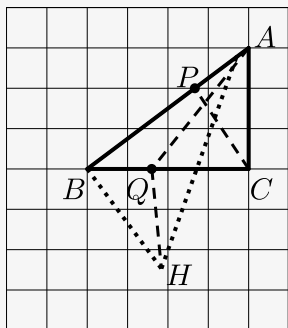


图 1

如图2中, 取格点 J, S , 连接 JS 得到交点 T , 作射线 BT , 取格点 W, R , 连接 WR 交射线 BT 于 H , 此时 $BH = 3$, 连接 AH 交 BC 于点 Q , 取格点 K , 使得 $AK = 5$, 连接 CK 交 AB 于 P , 点 P, Q 即为所求 .

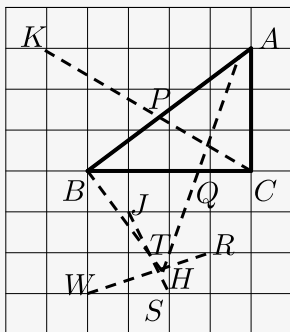


图 2

故答案为如图2中, 取格点 J, S , 连接 JS 得到交点 T , 作射线 BT , 取格点 W, R , 连接 WR 交射线 BT 于 H , 此时 $BH = 3$, 连接 AH 交 BC 于点 Q , 取格点 K , 使得 $AK = 5$, 连接 CK 交 AB 于 P , 点 P, Q 即为所求 .

【标注】【知识点】利用三边关系解决的最短问题

16. 在每个小正方形的边长为1的网格中, 点 A, B, C, D 均在格点上, 点 E, F 分别为线段 BC, DB 上的动点, 且 $BE = DF$.

- (1) 如图1, 当 $BE = \frac{5}{2}$ 时, 计算 $AE + AF$ 的值等于 _____ .

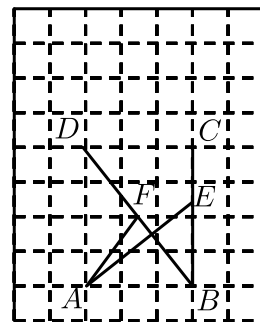


图 1

- (2) 当 $AE + AF$ 取得最小值时, 请在如图2所示的网格中, 用无刻度尺的直尺, 画出线段 AE , AF , 并简单说明点 E 和点 F 的位置是如何找到的 (不要求证明) _____.

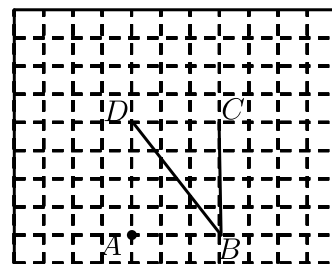


图 2

【答案】 (1) $\frac{5 + \sqrt{61}}{2}$

(2) 见解析.

【解析】 (1) (1) 由图象可得, $AB = 3$, $AD = 4$,

$$\therefore BD = 5.$$

$$\therefore DF = BE = \frac{5}{2},$$

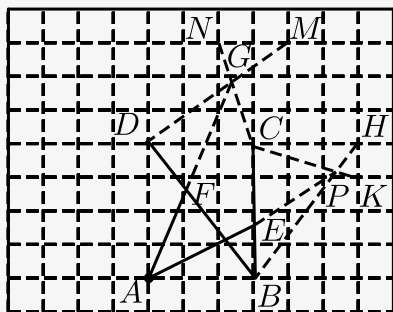
$\therefore F$ 为 BD 中点,

$$\therefore AF = \frac{1}{2}BD = \frac{5}{2}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEB \text{ 中, } AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \frac{\sqrt{61}}{2},$$

$$\therefore AE + AF = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}.$$

- (2) 如图, 取格点 H, K , 连接 BH, CK , 相交于点 P . 连接 AP , 与 BC 相交, 得点 E . 取格点 M, N , 连接 DM, CN , 相交于点 G . 连接 AG , 与 BD 相交, 得点 F , 线段 AE, AF 即为所求.



由题可知，四边形 $ABCD$ 为矩形， $AB = 3$ ， $AD = 4$ ，

$\angle ADB = \angle CBD = \angle CBH$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中， $BC = 4$ ， $CH = 3$ ， $BH = 5$ ，

$\therefore \triangle BCP \sim \triangle HKP$ ， $\therefore \frac{BC}{KH} = \frac{BP}{HP} = 4$ ，

$\therefore BP = BC = AD = 4$ ，

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle PBE$ ，

$$\begin{cases} AD = PB \\ \angle ADF = \angle PBE \\ DF = BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle PBE(\text{SAS})$ ，

$\therefore AF = PE$ ，

$(AE + AF)_{\min} = (AE + PE)_{\min}$ ，

即 $(AE + AF)_{\min} = AP$ ，点 E 即为线段 AP 与 BC 的交点．

同理，在 $DM = 5$ ， $\angle BDM = 90^\circ$ ，

$\triangle DCG \sim \triangle MNG$ ， $\frac{DC}{MN} = \frac{DG}{MG} = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore DG = DC = AB = 3$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle GDF$ 中，

$$\begin{cases} AB = DG \\ \angle ABE = \angle GDF \\ BE = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle GDF(\text{SAS})$ ，

$\therefore AE = FG$ ，

$(AE + AF)_{\min} = (AF + FG)_{\min}$ ，

即 $(AE + AF)_{\min} = AG$ ，点 F 即为线段 AG 与 BD 的交点．

【标注】【能力】运算能力

【知识点】SAS

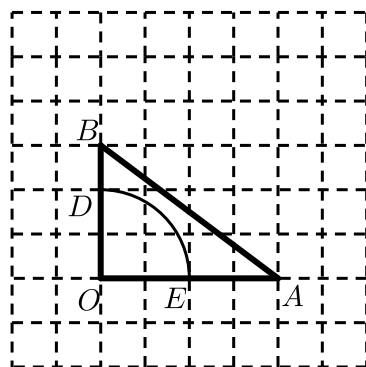
【知识点】解直角三角形的综合应用

【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【知识点】相似三角形的性质

七、线段和最值问题（阿氏圆）

17. 如图，在每个小正方形的边长为1的网格中， $\triangle OAB$ 的顶点 O ， A ， B 均在格点上，点 E 在 OA 上，且点 E 也在格点上．



- (1) $\frac{OE}{OB}$ 的值为 _____ .
- (2) $\widehat{DE}$ 是以点 O 为圆心，2为半径的一段圆弧，在如图所示的网格中，将线段 OE 绕点 O 逆时针旋转得到 OE' ，旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，连接 $E'A$ ， $E'B$ ，当 $E'A + \frac{2}{3}E'B$ 的值最小时，请用无刻度的直尺画出点 E' ，并简要说明点 E' 的位置是如何找到的（不要求证明） _____ .

【答案】 (1) $\frac{2}{3}$

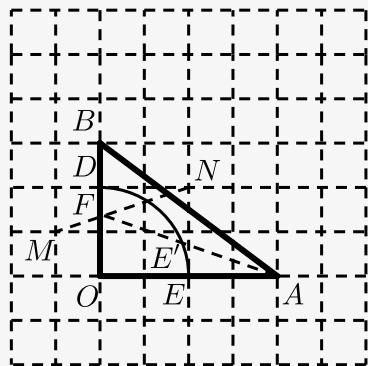
(2) 画图见解析．

取格点 M ， N ，连接 MN ，交 OB 于点 F ，连接 AF ，交 $\widehat{DE}$ 于点 E' ，点 E' 即为所求．

【解析】 (1) $\because OE = 2, OB = 3,$

$$\therefore \frac{OE}{OB} = \frac{2}{3} .$$

(2)

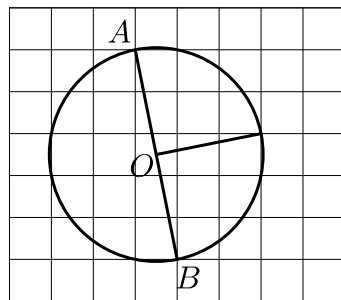


取格点 M ， N ，连接 MN ，交 OB 于点 F ，连接 AF ，交 $\widehat{DE}$ 于点 E' ，点 E' 即为所求．

八、与圆相关

例题7

18. 如图，在每个小正方形的边长为1的网格中，点 A ，点 B 均落在格点上， AB 为 $\odot O$ 的直径．



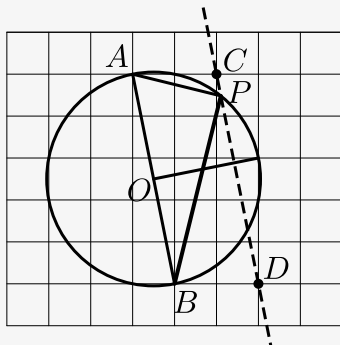
- (1) AB 的长等于 _____ ．
- (2) 请在如图所示的网格中，用无刻度的直尺，画出一个以 AB 为斜边，面积为5的 $\text{Rt}\triangle PAB$ ，并简要说明点 P 的位置是如何找到的（不要求证明） _____ ．

【答案】(1) $\sqrt{26}$

(2) 画图见解析，取格点 C ， D ，连接 CD 与 $\odot O$ 交于 P 点

【解析】(1) $AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$ ．

(2) 取格点 C ， D ，连接 CD 与 $\odot O$ 交于 P 点，连 PA ， PB ， $\triangle PAB$ 即为所求．

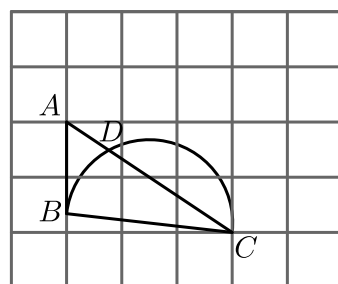


【标注】【知识点】作直角三角形

练习7

19.

如图，在每个小正方形的边长为1的网格中， $\triangle ABC$ 的顶点 A ， C 均落在格点上，点 B 在网格线上，且 $AB = \frac{5}{3}$ 。



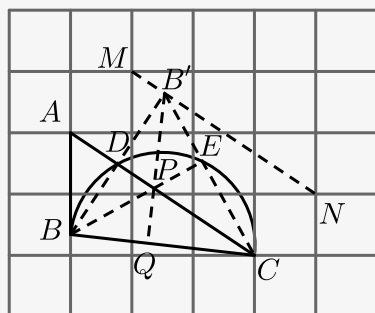
- (1) 线段 AC 的长等于 _____。
- (2) 以 BC 为直径的半圆与边 AC 相交于点 D ，若 P ， Q 分别为边 AC ， BC 上的动点，当 $BP + PQ$ 取得最小值时，请用无刻度的直尺，在如图所示的网格中，画出点 P ， Q ，并简要说明点 P ， Q 的位置是如何找到的（不要求证明） _____。

【答案】(1) $\sqrt{13}$

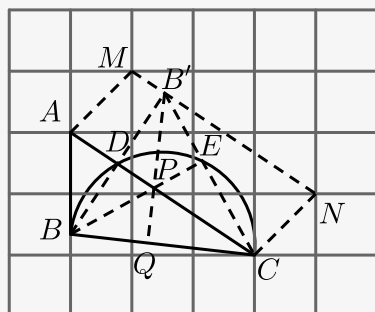
(2) 画图见解析，证明见解析。

【解析】(1) $AC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ 。

- (2) 如图，取格点 M ， N ，连接 MN ，连接 BD 并延长，与 MN 相交于点 B' ，连接 $B'C$ ，与半圆相交于点 E ，连接 BE ，与 AC 相交于点 P ，连接 $B'P$ 并延长，与 BC 相交于点 Q ，则点 P ， Q 即为所求。



连接 AM ， CN ，



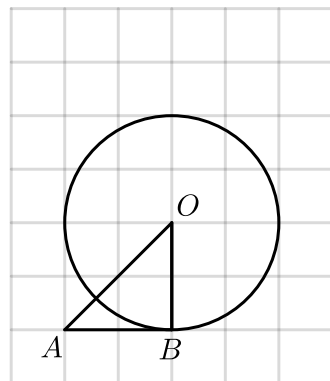
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times 3 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 3 = \frac{5}{2},$$

$\therefore BC$ 是直径，

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle BDC = \angle BEC = 90^\circ, \\
&\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{5}{2}, \\
&\therefore BD = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}, \\
&\therefore MN \parallel AC, MN = AC = \sqrt{13}, \\
&\therefore BB' \perp MN, \\
&\therefore S_{\text{平行四边形}AMNC} = MN \cdot DB', \\
&\therefore S_{\text{平行四边形}AMNC} = 4 \times 3 - 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \\
&= 12 - 1 - 6 = 5, \\
&\therefore DB' = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}, \\
&\therefore BD = DB', \\
&\therefore CD \text{ 垂直平分 } BB', \\
&\therefore BP = B'P, \\
&\therefore BP + PQ = B'P + PQ \geq B'Q, \\
&\therefore \text{当且仅当 } B', P, Q \text{ 三点共线, 且 } B'Q \perp BC \text{ 时, } BP + PQ \text{ 取得最小值,} \\
&\therefore BB' \perp CD, B'C \perp BE, CD \text{ 与 } BE \text{ 交于点 } P, \\
&\therefore P \text{ 点是 } \triangle B'BC \text{ 的垂心,} \\
&\therefore B'Q \perp BC, \\
&\therefore \text{点 } B' \text{ 到 } BC \text{ 的距离最小,} \\
&\text{故 } BP + PQ \text{ 取得最小值时, 点 } P, Q \text{ 即为所求.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用垂线段最短求最值

20. 如图, 在每个小正方形的边长为1的网格中, $\triangle ABO$ 的顶点 A, B, O 均落在格点上, OB 为 $\odot O$ 的半径.



(1) $\angle AOB$ 的大小等于 _____ (度) .

- (2) 将 $\triangle ABO$ 绕点 O 顺时针旋转, 得 $\triangle A'B'O$, 点 A, B 旋转后的对应点为 A', B' . 连接 AB' , 设线段 AB' 的中点为 M , 连接 $A'M$. 当 $A'M$ 取得最大值时, 请在如图所示的网格中, 用无刻度的直尺画出点 B' , 并简要说明点 B' 的位置是如何找到的(不要求证明) _____.

【答案】 (1) 45°

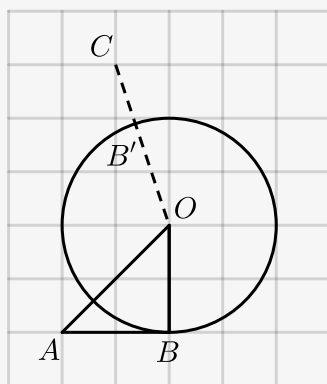
(2) 取格点 C , 连接 OC 与 $\odot O$ 交于点 B' , 则点 B' 即为所求

【解析】 (1) $\because OB = AB = 2, \angle ABO = 90^\circ$.

$$\therefore \angle AOB = 45^\circ.$$

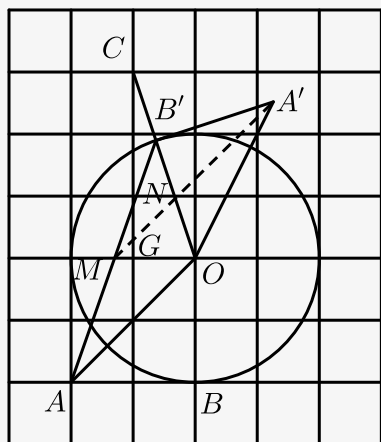
故答案为: 45° .

(2) 如图, 取格点 C , 连接 OC 与 $\odot O$ 交于点 B' , 则点 B' 即为所求.



理由: 取 OB' 的中点 N .

连结 $MN, A'N$.



$\because$ 点 M 是 AB' 的中点, 点 N 是 OB' 的中点,

$$\therefore MN \parallel OA, MN = \frac{1}{2}OA,$$

$$\therefore AM' \leq MN + A'N,$$

$\therefore$ 当且仅当 A, N, M 三点共线时,

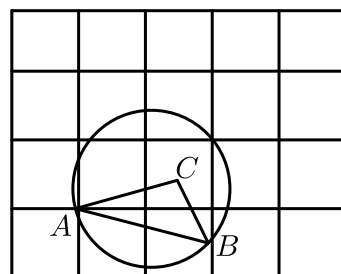
$A'M$ 取得最大值,

当 $A'M$ 取得最大值时,

$\angle CGA' = \angle COA' = 45^\circ$,
 $\therefore \angle CNG = \angle A'NO$,
 $\therefore \angle GCO = \angle N'AO$,
 $\therefore \tan \angle B'A'N = \frac{B'N}{A'B'} = \frac{1}{2}$,
 $\angle B'A'N + \angle NA'O = 45^\circ$,
 $\therefore \tan \angle NA'O = \frac{1}{3}$,
 $\therefore \tan \angle GCO = \frac{1}{3}$,
 $\therefore$ 取格点 C , 连结 OC 与 $\odot o$ 交于点 B' ,
 则 B' 即为所求 .

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

21. 如图, 在每个小正方形的边长为1的网格中, $\triangle ABC$ 的顶点 A 在格点上, B 是小正方形边的中点, $\angle ABC = 50^\circ, \angle BAC = 30^\circ$, 经过点 A, B 的圆的圆心在边 AC 上.



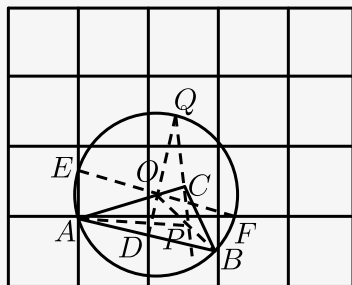
- (1) 线段 AB 的长等于 ____ .
 (2) 请用无刻度的直尺, 在如图所示的网格中, 画出一个点 P , 使其满足 $\angle PAC = \angle PBC = \angle PCB$, 并简要说明点 P 的位置是如何找到的 (不要求证明) ____ .

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

- (2) 取圆与网格线的交点 E, F , 连接 EF 与 AC 相交, 得圆心 O ; AB 与网格线相交与点 D , 连接 DO 并延长交圆 O 于点 Q , 连接 QC 并延长, 与点 B, O 的连线 BO 相交与点 P , 连接 AP , 则点 P 满足 $\angle PAC = \angle PBC = \angle PCB$

【解析】 (1) $AB = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

- (2) 如图, 取圆与网格线的交点 E, F , 连接 EF 与 AC 相交, 得圆心 O ; AB 与网格线相交与点 D , 连接 DO 并延长交圆 O 于点 Q , 连接 QC 并延长, 与点 B, O 的连线 BO 相交与点 P , 连接 AP , 则点 P 满足 $\angle PAC = \angle PBC = \angle PCB$.



【标注】【知识点】直接用勾股求边长

 网格纸

